

文章编号: 1000-7598-(2012)08-2265-05

考虑尺寸排除效应颗粒迁移模型的建立

刘泉声¹, 赵 军^{1,2}, 张程远¹

(1. 中国科学院武汉岩土力学研究所 岩土力学与工程国家重点实验室, 武汉 430071;

2. 甘肃省交通规划勘察设计院有限责任公司, 兰州 730030)

摘 要: 以地下水源热泵回灌中的物理堵塞问题作为研究背景, 建立一种基于质量平衡方程来模拟多孔介质中颗粒迁移和沉积造成孔隙损伤的数学模型, 同时考虑了多孔介质孔隙中悬浮颗粒浓度随时间的动态变化, 引入了流量折减系数 $\alpha(r_s, x, t)$ 和进入系数 $\gamma(r_s, x, t)$ 这两个变量, 充分考虑了尺寸排除效应的影响。堵塞的发生往往是由一个颗粒所引起的, 即一个颗粒堵塞一个孔隙, 反之亦然。研究结果为解决回灌井物理堵塞的室内外试验研究提供理论依据。

关 键 词: 水源热泵; 尺寸排除效应; 颗粒迁移; 颗粒沉积。

中图分类号: TU 443

文献标识码: A

Establishment of particulate transport: size exclusion effect

LIU Quan-sheng¹, ZHAO Jun^{1,2}, ZHANG Cheng-yuan¹

(1. State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences,

Wuhan 430071, China; 2. Gansu Provincial Transportation Planning, Survey and Design Institute Co., Ltd., Lanzhou 730030, China)

Abstract: Study on the physical clogging of water source heat pump (WSHP) in recharge, and based on the mass balance equation to establish the mathematical model of transport and deposition of particulates. The suspended particle's concentration dynamic changes with time and bring into the two variable quantity of $\alpha(r_s, x, t)$ and $\gamma(r_s, x, t)$ are introduced, and the size exclusion effect in model is considered fully. The occurrence of clogging is often caused by a particle that one particle plug a pore, and vice versa. The results of theoretical of the physical clogging of WSHP in recharge would directly bring into experiment research.

Key words: water source heat pump; size exclusion effect; particulate transport; particulate deposition

1 引 言

悬浮细颗粒在多孔介质中的迁移所涉及的范围较广, 比如给水工程、深层地下水过滤工程以及地热工程等, 悬浮细颗粒在流体作用下会因为孔隙直径的大小不同而产生不同的堵塞方式, 其中主要的堵塞方式有捕获、沉积、吸附这 3 种形式, 沉积在孔隙里的细颗粒将慢慢地累积在孔隙壁, 从而影响到水体在孔隙里的流动, 这种累积过程使污染物的浓度在局部越来越高。同样地, 由于孔隙受到堵塞将使得地下水的流速受阻, 从而迫使地下水重新选择优先流动路径, 进而使地下水受污染的范围扩大。因此, 对多孔介质中悬浮颗粒的迁移和沉积的研究就显得格外重要。

Iwasaki^[1]首先提出了颗粒捕获和渗透的现象模型, 并且由 Herzig 等^[2]运用到由于岩石渗透性降低的注水井系统中, 模型假定颗粒沉积符合线性动力学方程, 模型的数值解与试验结果能较好的吻合, 虽然该模型对由于岩石渗透性降低而引起注水井注水效率减少是有所帮助, 但该模型并没有考虑颗粒的变形机制, 只是假定了单一的线性关系。随后, 不同的学者在微观节点模型上进行了大量的研究^[3-10], 在这些研究中都涉及到颗粒沉积的力学机制。

Santos 等^[11]和 Sharma 等^[12]对多孔介质中悬浮颗粒迁移的平衡方程进行了推导, 假定孔隙的大小是均匀分布, 整个孔隙都可能有悬浮颗粒通过, 并且颗粒的迁移是随着孔隙内水体的流动而流动, 但在

收稿日期: 2010-04-19

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(No. 40772161); 中国科学院武汉岩土力学研究所岩土力学与工程国家重点实验室前沿探索性项目(No. SKLQ009)。

第一作者简介: 刘泉声, 男, 1962 年生, 博士, 研究员, 博士生导师, 主要从事岩石温度效应、裂隙岩体温度-水力-应力耦合分析、地下工程稳定性分析及岩土工程加固技术等方面的教学与研究工作。E-mail: liuqs@whrsm.ac.cn

假定多孔介质中孔隙的大小均匀分布时是有缺陷的。在自然界中,当悬浮颗粒经过比其直径小的孔隙时将堵塞在孔隙的入口处;当悬浮颗粒流经比其直径大的孔隙半径时才会孔隙中随着水体的流动而流动;本文在国外学者研究的基础上提出了基于孔隙排斥效应的数学模型,并首次把该模型运用到水源热泵井回灌困难的物理堵塞的问题中,为后面的试验研究提供了坚实的理论基础。

2 多孔介质中颗粒沉积和迁移数学模型的建立

2.1 模型的基本假定

建立模型的基本假定:①多孔介质中含有大量孔径服从正态对数分布且相互连接的孔隙;②多孔介质体为均匀、不可压缩体;③悬浮颗粒均匀地分布在孔隙中,并且其浓度大小对流体流动没有影响;④孔径沿流向方向大小不变,沿径向服从正态对数分布,孔隙间相互平行;⑤通过孔隙的流量 Q 与孔隙半径 r 的 4 次方呈比例关系,即 $Q \propto kr^4$ 。

2.2 经典深层过滤模型

结合达西定律,经典的深层过滤模型考虑颗粒质量平衡、颗粒捕获动力效应后得^[1-2]

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial c(X,T)}{\partial T} + \frac{\partial c(X,T)}{\partial X} &= -\frac{1}{n} \frac{\partial \sigma(X,T)}{\partial T} \\ \frac{\partial \sigma(X,T)}{\partial T} &= \lambda(\sigma)nc(X,T) \\ U &= -\frac{k_0 k(\sigma)}{\mu L} \frac{\partial P}{\partial X} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中: $c(X,T)$ 为悬浮颗粒的浓度; $\sigma(X,T)$ 为沉积颗粒的浓度,其大小等于单位体积内沉积在孔隙壁上的颗粒数的总和; $\lambda(\sigma)$ 为沉积系数。 $k(\sigma)$ 为由于颗粒的沉积渗透率能变化的函数; k_0 为起始孔隙率。 X 、 T 分别为坐标和时间的无量纲值; n 为孔隙率; μ 为水的黏度系数; U 为孔隙中水体的流动速度。

在适当的边界条件下可以通过抛物线法^[10]对式(1)进行求解得出具体的解析解。事实上,式(1)中前两式是相互独立的,二者构成颗粒迁移和捕获的动力模型;在考虑尺寸排除效应时,当极细小颗粒在孔隙里流动时将不会发生捕获,细小颗粒在孔隙里流动时将可能发生沉积和桥堵现象,而大颗粒往往在孔隙入口处就产生了堵塞现象,此时,除非有人为或外界因素才能迫使其在孔隙里流动,但式(1)并未能考虑到尺寸排除效应、颗粒分布和孔隙尺寸分布的影响。因此,本文的重点是建立考虑尺

寸排除效应的颗粒捕获力学模型,关注悬浮颗粒粒径分布和孔隙尺寸分布对捕获效应的影响,并在以后的试验中对模型进行验证。

2.3 模型的建立过程

在解决问题前,首先引入悬浮颗粒,捕获颗粒以及孔隙半径的分布:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty f_s(r_s, x, t) dr_s &= 1 \\ \int_0^\infty f_c(r_s, x, t) dr_s &= 1 \\ \int_0^\infty f_p(r_p, x, t) dr_p &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中: $f_s(r_s, x, t)$ 为半径为 r_s 的悬浮颗粒的分布函数; $f_c(r_s, x, t)$ 为捕获颗粒的分布函数; $f_p(r_p, x, t)$ 为孔隙的分布函数。

引入考虑尺寸排除效应影响时的颗粒沉积浓度表达式:

$$C(r_s, x, t) dr_s = c(x, t) f_s(r_s, x, t) dr_s \quad (3)$$

式中: $C(r_s, x, t) dr_s$ 为单位孔隙体积中半径处于 $[r_s, r_s + dr_s]$ 内的悬浮颗粒数; $c(x, t)$ 为单位孔隙体积内颗粒数的总和。

把式(3)代入式(2)的第1个表达式后得

$$\int_0^\infty C(r_s, x, t) dr_s = c(x, t) \quad (4)$$

$$\Sigma(r_s, r_p, x, t) dr_p dr_s = \sigma(x, t) f_c(r_s, r_p, x, t) dr_p dr_s \quad (5)$$

式中: $\Sigma(r_s, r_p, x, t) dr_p dr_s$ 为单位孔隙体积中孔隙半径为 $[r_p, r_p + dr_p]$ 内沉积的半径处于 $[r_s, r_s + dr_s]$ 范围内的悬浮颗粒总数; $\sigma(x, t)$ 为在单一孔隙中悬浮颗粒沉积在孔隙壁的颗粒浓度。

在考虑尺寸排除效应时,当悬浮颗粒半径小于孔隙半径时, $\Sigma(r_s, r_p, x, t) = 0$; 当颗粒半径大于孔隙半径时,颗粒将沉积在孔隙壁,得

$$f_c(r_s, x, t) dr_s = \int_0^\infty f_c(r_s, r_p, x, t) dr_p dr_p \quad (6)$$

积分式(5)代入式(6)后得

$$\int_0^\infty \Sigma(r_s, r_p, x, t) dr_p dr_s = \Sigma(r_s, x, t) dr_s \quad (7)$$

对式(7)中的 r_s 从 0 到 ∞ 积分,并且结合式(1),得

$$\int_0^\infty \Sigma(r_s, x, t) dr_s = \sigma(x, t) \quad (8)$$

以上的推导再现了考虑孔隙尺寸排除效应时孔隙入口处悬浮颗粒浓度公式的建立过程。下面建立孔隙内悬浮颗粒浓度公式。

悬浮颗粒半径为 r_s 的颗粒在孔隙范围为

$[r_p, r_p + dr_p]$ 内的颗粒浓度为

$$V(r_p, r_s, x, t) dr_p = v(x, t) f_p(r_p, x, t) dr_p \quad (9)$$

式中: $V(r_p, r_s, x, t)$ 为半径 r_s 的颗粒在半径为 r_p 的孔隙内被捕获的量, 为无量纲单位; $v(x, t)$ 为孔隙分布函数。

对式 (9) 进行积分, 并结合式 (1), 得

$$\int_0^\infty V(r_p, x, t) dr_p = v(x, t) \quad (10)$$

实际上, 孔隙内悬浮颗粒的浓度应等于初始悬浮颗粒的浓度减去由于孔隙尺寸排除效应的影响沉积在孔隙入口处的浓度:

$$V(r_p, x, t) dr_p = V(r_p, x, t=0) dr_p - \int_0^\infty \Sigma(r_s, r_p, x, t) dr_s dr_p \quad (11)$$

式 (11) 是关于时间 t 的函数, 因此, 可以对式 (11) 进行积分:

$$\frac{\partial V(r_p, x, t)}{\partial t} + \int_{r_s}^\infty \frac{\partial \Sigma(r_s, r_p, x, t)}{\partial t} dr_s = 0 \quad (12)$$

式 (12) 的物理意义为: 孔隙入口处颗粒的沉积是大于孔隙半径的悬浮颗粒引起的, 亦即通常所假定的一个颗粒能阻塞一个孔隙; 反之亦然。

接下来推导悬浮颗粒和捕获颗粒的平衡方程。定义半径为 r_s 的颗粒通过半径为 r_p 的孔隙的流量为 $Q(r_s, r_p, x, t)$ 。事实上, 当 $r_s < r_p$ 时, $Q(r_s, r_p, x, t) = 0$ 。结合假定条件⑤得, 通过半径在 $[r_p, r_p + dr_p]$ 内的流体总流量为

$$Q(r_s, x, t) = \int_0^\infty Q(r_s, r_p, x, t) dr_p \quad (13)$$

根据假定条件④, 即通过孔隙的流量同孔隙半径的 4 次方成比例关系 ($Q \propto kr^4$), 可进一步得到下式:

$$Q(r_s, r_p, x, t) = UC(r_s, x, t) \frac{V(r_p, x, t) r_p^4 dr_p}{\int_0^\infty V(r_p, x, t) r_p^4 dr_p} \quad (14)$$

在式 (14) 中, $\frac{V(r_p, x, t) r_p^4 dr_p}{\int_0^\infty V(r_p, x, t) r_p^4 dr_p}$ (Hagen-

Poiseuille 公式, Landau 和 Lifshitz) 即为根据假定条件④得出的系数。

将式 (14) 代入 (13) 后, 得

$$Q(r_s, x, t) = UC(r_s, x, t) \frac{\int_0^\infty V(r_p, x, t) r_p^4 dr_p}{\int_0^\infty V(r_p, x, t) r_p^4 dr_p} \quad (15)$$

当颗粒流过大于其直径的孔隙时, 颗粒中的一部分会在孔隙壁发生沉积或捕获, 这样就对孔隙中的流体的流量产生影响, 因此, 引入流量折减系数

$$\alpha(r_s, x, t), \text{ 观察式 (15) 可以看出 } \frac{\int_0^\infty V(r_p, x, t) r_p^4 dr_p}{\int_0^\infty V(r_p, x, t) r_p^4 dr_p},$$

正是我们要找的流量折减系数 $\alpha(r_s, x, t)$, 现在, 可把式 (15) 重新表示为

$$Q(r_s, x, t) = UC(r_s, x, t) \alpha(r_s, x, t) \quad (16)$$

当颗粒流经大于其半径的新的孔隙前, 并不能保证所有的悬浮颗粒都能进入新的孔隙中, 所以有必要引入未知量进入系数 $\gamma(r_s, x, t)$, 根据假定条件⑤得

$$n \frac{\partial [\gamma(r_s, x, t) C(r_s, x, t)]}{\partial t} + \frac{\partial Q(r_s, x, t)}{\partial x} + \frac{\partial \Sigma(r_s, x, t)}{\partial t} = 0 \quad (17)$$

将式 (16) 代入式 (17) 后得

$$n \frac{\partial [\gamma(r_s, x, t) C(r_s, x, t)]}{\partial t} + \frac{\partial [U \alpha(r_s, x, t) C(r_s, x, t)]}{\partial x} + \frac{\partial \Sigma(r_s, x, t)}{\partial t} = 0 \quad (18)$$

式 (18) 就是所求悬浮颗粒群体的平衡方程, 通过方程可以看出, 在引入变量进入系数 $\gamma(r_s, x, t)$ 和流量折减系数 $\alpha(r_s, x, t)$ 后, 能真正地体现出尺寸排除效应, 式中 U 为关于时间的函数, 并非坐标的函数, 因此, 可以将 U 从式中直接拿出。

为了便于以后问题的展开, 建立在封闭系统中的控制方程, 此处的封闭系统指颗粒进入孔隙后在孔隙内的迁移、沉积以及捕获的情况。研究的重点将放在颗粒捕获率和孔隙堵塞动力方程上; 颗粒的捕获效率可定义为单位时间内半径 $[r_s, r_s + dr_s]$ 悬浮颗粒在孔隙半径 $[r_p, r_p + dr_p]$ 内被捕获的颗粒数同初始颗粒数的比值, 其与孔隙里颗粒的分布概率、比例系数有关, 即

$$\frac{\partial \Sigma(r_s, r_p, x, t)}{\partial t} = \lambda(r_s, r_p) P \quad (19)$$

在式 (19) 中概率 P 已被 Herzig 等^[2]在 1970 年提出:

$$P = UC(r_s, x, t) \frac{r_p^4 V(r_p, x, t) dr_p}{\int_0^\infty r_p^4 V(r_p, x, t) dr_p} \quad (20)$$

当颗粒半径小于孔隙半径, 即没有颗粒在孔隙壁里沉积时, $\lambda(r_s, r_p) = 0$ 。

对式 (19) 进行从 0 到 ∞ 积分后, 得到颗粒在孔隙里捕获率:

$$\frac{\partial \Sigma(r_s, x, t)}{\partial t} = \frac{UC(r_s, x, t)}{\int_0^\infty r_p^4 V(r_p, x, t) dr_p} \int_0^{r_s} \lambda(r_s, r_p) r_p^4 V(r_p, x, t) dr_p \quad (21)$$

将式 (19) 代入式 (12) 中后得到孔隙堵塞动力方程:

$$\frac{\partial V(r_p, x, t)}{\partial t} = - \frac{UV(r_p, x, t)r_p^4}{\int_0^\infty r_p^4 V(r_p, x, t) dr_p} \int_{r_s}^\infty \lambda(r_s, r_p) C(r_s, x, t) dr_s \quad (22)$$

这样就建立了在封闭系统中关于 3 个未知量 $C(r_s, x, t)$ 、 $\Sigma(r_s, x, t)$ 、 $V(r_p, x, t)$ 的函数方程:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial [\gamma(r_s, x, t) C(r_s, x, t)]}{\partial t} + \\ & U \frac{\partial [\alpha(r_s, x, t) C(r_s, x, t)]}{\partial x} + \frac{\partial \Sigma(r_s, x, t)}{\partial t} = 0 \\ & \frac{\partial \Sigma(r_s, x, t)}{\partial t} = \\ & \frac{UC(r_s, x, t)}{\int_0^\infty r_p^4 V(r_p, x, t) dr_p} \int_0^{r_s} \lambda(r_s, r_p) r_p^4 V(r_p, x, t) dr_p \\ & \frac{\partial V(r_p, x, t)}{\partial t} = \\ & - \frac{UV(r_p, x, t)r_p^4}{\int_0^\infty r_p^4 V(r_p, x, t) dr_p} \int_{r_s}^\infty \lambda(r_s, r_p) C(r_s, x, t) dr_s \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

3 边界条件

下面将对孔隙介质中边界条件的确立进行描述, 在确定边界条件时, 关心更多的是悬浮颗粒在入口处的浓度变化情况。在初始阶段, 先假定一给定的颗粒浓度的分布:

$$x=0, C(r_s, x=0, t) = C^0(r_s, t) \quad (24)$$

公式 (24) 中 $C^0(r_s, t)$ 为起始孔隙浓度分布函数。

多孔介质的入口处的横截面可以理解为一个多孔筛, 注入的细颗粒在水体作用下流经可利用的多孔介质孔隙中, 对于那些未能利用的多孔介质孔隙将发生沉积现象, 久而久之, 将在孔隙壁形成沉积, 进而引起堵塞。悬浮颗粒在注入起始阶段 ($t=0$) 的边界条件的表达式为

$$\left. \begin{aligned} & C(r_s, x, t=0) = 0 \\ & \Sigma(r_s, x, t=0) = 0 \\ & V(r_p, x, t=0) = V^0(r_p, x) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

式中: $V^0(r_p, x)$ 为起始孔隙分布函数。

考虑到该数学模型的复杂性, 要给出具体的解析解是相当的困难, 在以后的工作中笔者将通过两个简单的例子对该模型进行验证。

4 结 论

模型的建立是基于质量平衡方程, 并考虑了尺寸排除效应进行的, 该模型对解决地源热泵回灌井回灌困难的问题提供了理论依据, 模型的建立将为后续的试验研究提供理论基础, 笔者在接下来的工作中将利用试验来验证该模型。

(1) 引入了流量折减系数 $\alpha(r_s, x, t)$ 和进入系数 $\gamma(r_s, x, t)$ 这两个变量, 充分考虑了尺寸排除效应的影响。

(2) 从模型中可以得到, 堵塞的发生往往是由一个颗粒所引起的, 即一个颗粒堵塞一个孔隙, 反之亦然。

(3) 模型的建立没有考虑孔隙率变化的情况, 在物质的迁移和堵塞过程中, 孔隙率的变化往往也是个动态的变化过程, 在以后的研究中应充分考虑孔隙率的变化。

参 考 文 献

- [1] IWASAKI T. Some notes on sand filtration[J]. **Journal of American Water Works Association**, 1937, 29(10): 1591—1602.
- [2] HERZIG J P, LECLERC D M, LE GOFF P. Flow of suspensions through porous media—application to deep filtration[J]. **Industrial & Engineering Chemistry Research**, 1970, 65(5): 8—35.
- [3] MILLARD A, REJIB A, CHIJIMATSU M, et al. Numerical study of the THM effects on the near-field safety of a hypothetical nuclear waste repository—BMT1 of the DECOVALEX III project. Part 2: Effects of THM coupling in continuous and homogeneous rocks[J]. **International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences**, 2005, 42: 731—744.
- [4] MASSEI N, LACROIX M, WANG H Q, et al. Transport of particulate material and dissolved tracer in a highly permeable porous medium: comparison of the transfer parameters[J]. **Journal of Contaminant Hydrology**, 2002, 57(1—2): 21—39.
- [5] STEPHEN E SILLIMAN. Particle transport through two-dimensional, saturated porous media: influence of physical structure of the medium[J]. **Journal of Hydrology**, 1995, 167(1—4): 79—98.

-
- [6] STEPHEN E SILLIMAN. The importance of the third dimension on transport through saturated porous media: case study based on transport of particles[J]. **Journal of Hydrology**, 1996, 179(1—4): 181—195.
- [7] NASRE-DINE AHIR, et al. Influence of internal structure and medium length on transport and deposition of suspended particles: a laboratory study[J]. **Transport Porous Media.**, 2009, (2): 76: 289—307.
- [8] BARTELDS G A, BRUINING J, MOLENAAR J. The modeling of velocity enhancement in polymer flooding[J]. **Transport in Porous Media**, 1997, 26(1): 75—88.
- [9] NORIO TENMA, KASUMI YASUKAWA, GEORGE ZYVOLOSKI. Model study of the thermal storage system by FEHM code[J]. **Geothermics**, 2003, 32(4—6): 603—607.
- [10] MASSEI N, LACROIX M, WANG H Q, et al. Transport of particulate material and dissolved tracer in a highly permeable porous medium: comparison of the transfer parameters[J]. **Journal of Contaminant Hydrology**, 2002, 57(7): 21—39.
- [11] SANTOS A, BEDRIKOVETSKY P, FONTOURA S. Analytical micro model for size exclusion: Pore blocking and permeability reduction[J]. **Journal of Membrane Science**, 2008, 308(1—2): 115—127.
- [12] SHARMA M M, YORTSOS Y C. Fines migration in porous media[J]. **AIChE Journal**, 1987, 33(10): 1654—1662.